تعريف:

ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور، نقول أن f تشاكل إذا كان تقابل وفي هذه الحالة نقول أن A يشاكل A' ونرمز لذلك $A \cong A'$

* مبرهنة التشاكل الأولى:

ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور عندئذ:

(1) $A/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$

(2) إذا كان f غامراً فإن $A/\ker(f) \cong A'$

البرهان (مطلوب)

$h: A/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$

$\forall a+\ker(f) \in A/\ker f : h(a+\ker f) = f(a)$

* مبرهنة التشاكل الثانية

ليكن A جبراً فوق الحلقة R و B , D مثاليين في A عندئذ:

$B+D/B \cong D/B\cap D$

البرهان (مطلوب)

نعرف العلاقة $h: D \to B+D/B$

$\forall d \in D: h(d) = d+B$

تطبيقات اشتقاق:

ذكرنا سابقاً بأن $d: A \to A'$ تطبيق اشتقاق إذا كان:

(1) d تشاكل موديولات

(2) $\forall a,b \in A \quad d(a \cdot b) = d(a)b + a\,d(b)$

إذا كان $A = A'$ فإن التطبيق d اشتقاق من A

وذكرنا أن $\mathrm{Im}(d)$ موديول جزئي في A و $\ker d$ جبر جزئي في A

* [illegible]

محاضرات الدفتر

القسم :　　　　السنة :　　　　المادة :　　　　المحاضرة :

تعريف:

لتكن A جبراً على الحلقة التبديلية والواحدية R

نرمز لمجموعة كل التطبيقات الاشتقاق المعرفة على A بالشكل $Der(A)$ والتي ليست خالية

مبرهنة

لتكن A جبراً على الحلقة R، ان مجموعة كل التطبيقات الاشتقاق $Der(A)$ المعرفة على A تشكل موديولاً على الحلقة R

البرهان:

نعرف عملية جمع $(+)$ بالشكل

$$+ : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$
$$(f,g) \longrightarrow f+g$$

لنثبت بالبداية أن جمع تطبيقي اشتقاق هو تطبيق اشتقاق

أولاً: لتكن $f,g \in Der A$ نعرف $f+g$ بالشكل الآتي $f+g : A \longrightarrow A$

$$\forall a \in A : (f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

لنبرهن أن $f+g$ تطبيق $\forall a,b \in A ; a=b$

بما أن f تطبيق فإن $f(a)=f(b)$

بما أن g تطبيق فإن $g(a)=g(b)$ وبالتالي

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = f(b) + g(b) = (f+g)(b)$$

نبرهن أنه تطبيق اشتقاق

$$\forall a,b \in A \quad \lambda \in R ;$$
$$(f+g)(a+b) \overset{?}{=} (f+g)(a) + (f+g)(b)$$

$$(f+g)(a+b) = f(a+b) + g(a+b) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b)$$
$$= f(a) + g(a) + f(b) + g(b)$$
$$= (f+g)(a) + (f+g)(b)$$

② $(f+g)(\lambda a) \overset{?}{=} \lambda(f+g)(a)$

$$(f+g)(\lambda a) = f(\lambda a) + g(\lambda a) = \lambda f(a) + \lambda g(a)$$
$$= \lambda[f(a)+g(a)]$$
$$= \lambda(f+g)(a)$$

③ $(f+g)(a.b) \overset{?}{=} b(f+g)(a) + a(f+g)(b)$

حسب الاشتقاق

$$(f+g)(a.b) = f(a.b) + g(a.b)$$
$$= [f(a)b + af(b)] + [g(a)b + ag(b)]$$
$$= [f(a)b + g(a)b] + [af(b) + ag(b)]$$
$$= b[f(a)+g(a)] + a[f(b)+g(b)]$$
$$= b(f+g)(a) + a(f+g)(b)$$

ومنه

$$f+g \in Der(A)$$

بتحقق الشروط الثلاث (+) تقبل

ليكن $(f,g),(f_1,g_1) \in Der(A)\times Der(A)$

نفرض أنهما متساويان

$$(f,g) = (f_1,g_1)$$

عندئذٍ $f = f_1 \quad g = g_1$

تتساوى التطبيقات إذا تساوت عند كل عنصر من عناصر المجال.

ومنه أياً كان $a \in A$

$$f(a) = f_1(a) \quad , \quad g(a) = g_1(a)$$

$$f(a) + g(a) = f_1(a) + g_1(a)$$
$$(f+g)(a) = (f_1+g_1)(a)$$
$$\Rightarrow f+g = f_1+g_1$$

⇐ عملية الجمع (+) : عملية داخلية

لنثبت أن هذه العملية (+) المعرفة على $Der(A)\times Der(A)$ تجميعية

ومغلقة بالنسبة للجمع وكل عنصر من عناصرها نظير

تجميعية :

$$\forall f, g, h \in Der(A) \Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$$

$$\forall a \in A .\ [(f+g)+h](a) = (f+g)(a) + h(a)$$
$$= [f(a) + g(a)] + h(a)$$
$$= f(a) + [g(a) + h(a)]$$
$$= f(a) + [(g+h)(a)]$$
$$= [f + (g+h)](a)$$

$$\Rightarrow f + (g+h) = (f+g)+h$$

. المحايد :

الدالة Der(A) تحوي عنصر محايد هو التطبيق الصفري

$$0 : A \longrightarrow A$$

$$\forall a \in A \ ;\ 0(a) = 0 \qquad \forall f \in Der(A)$$

بحيث أن

$$f + 0 = f$$

$$\forall a \in A : (f+0)(a) = f(a) + 0(a) = f(a)$$

$$\Rightarrow f + 0 = f$$

. النظير : ليكن $f \in Der(A)$ ونعرف الدالة

$$f : A \to A$$

$$\forall a \in A : (-f)(a) = -f(a)$$

علينا إثبات أن $-f$ هو تطبيق اشتقاق على A (دالة) بحيث أن $-f + f = 0$

$$\forall a \in A : (-f+f)(a) = (-f)(a) + f(a) = -f(a) + f(a)$$
$$= 0 = 0(a)$$

$$\Rightarrow -f + f = 0$$

تحقق شروط التبديلية

بالتالي عندما نجد أن الثلاثية (Der(A), +) زمرة تبديلية ...

المشتقة من شروط ...